

УДК 517.5

**Е.С. Афанасьева** (Ин-т прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск)

**Р.Р. Салимов** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

## Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнения Бельтрами.

В данной статье исследуется асимптотическое поведение на бесконечности гомеоморфных решений уравнения Бельтрами при различных условиях на дилатацию.

**1. Введение.** Пусть  $D$  – область в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , т.е. связное открытое подмножество  $\mathbb{C}$  и пусть  $\mu(z) : D \rightarrow \mathbb{C}$  – измеримая функция с  $|\mu(z)| < 1$  п.в. (почти всюду) в  $D$ . Уравнением Бельтрами называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z, \quad (1)$$

где  $f_{\bar{z}} = \bar{\partial}f = (f_x + if_y)/2$ ,  $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$ ,  $z = x + iy$ ,  $f_x$  и  $f_y$  частные производные отображения  $f$  по  $x$  и  $y$ , соответственно. Функция  $\mu$  называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \quad (2)$$

– *дилатационным отношением* уравнения (1). Уравнение Бельтрами (1) называется *вырожденным*, если  $\text{ess sup } K_\mu(z) = \infty$ .

Существование гомеоморфного  $W_{\text{loc}}^{1,1}$  решения было недавно установлено для многих вырожденных уравнениях Бельтрами, см., напр., соответствующие ссылки в монографиях [1], [2].

**2. Предварительные сведения.** Напомним некоторые определения. Борелева функция  $\rho : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$  называется *допустимой* для семейства кривых  $\Gamma$  в  $\mathbb{C}$ , пишут  $\rho \in \text{adm } \Gamma$ , если

$$\int_{\gamma} \rho(z) |dz| \geq 1 \quad (3)$$

для всех  $\gamma \in \Gamma$ . Тогда *модулем* семейства кривых  $\Gamma$  называется величина

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{C}} \rho^2(z) dm(z) \quad (4)$$

Здесь  $m$  обозначает меру Лебега в  $\mathbb{C}$ .

Следуя работе [3], пару  $\mathcal{E} = (A, C)$ , где  $A \subset \mathbb{C}$  – открытое множество и  $C$  – непустое компактное множество, содержащееся в  $A$ , называем *конденсатором*. Конденсатор  $\mathcal{E}$  называется *кольцевым конденсатором*, если  $G = A \setminus C$  – кольцо, т.е., если  $G$  – область, дополнение которой  $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$  состоит в точности из двух компонент. Говорят также, что конденсатор  $\mathcal{E} = (A, C)$  лежит в области  $D$ , если  $A \subset D$ . Очевидно, что если  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  – непрерывное, открытое отображение и  $\mathcal{E} = (A, C)$  – конденсатор в  $D$ , то  $(fA, fC)$  также конденсатор в  $fD$ . Далее  $f\mathcal{E} = (fA, fC)$ .

Функция  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  *абсолютно непрерывна на прямой*, имеющей непустое пересечение с  $A$ , если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в  $A$ . Функция  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  принадлежит классу ACL (*абсолютно непрерывна на почти всех прямых*), если она абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси.

Обозначим через  $C_0(A)$  множество непрерывных функций  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  с компактным носителем,  $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$  – семейство неотрицательных функций  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что 1)  $u \in C_0(A)$ , 2)  $u(z) \geq 1$  для  $z \in C$  и 3)  $u$  принадлежит классу ACL. Также обозначим

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}. \quad (5)$$

Величину

$$\text{cap } \mathcal{E} = \text{cap } (A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int_A |\nabla u|^2 dm(z) \quad (6)$$

называют *ёмкостью* конденсатора  $\mathcal{E}$ .

Пусть  $D$  – область в  $\mathbb{C}$ .  $E, F \subseteq D$  – произвольные множества. Обозначим через  $\Delta(E, F; D)$  семейство всех кривых  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , которые соединяют  $E$  и  $F$  в  $D$ , т.е.  $\gamma(a) \in E$ ,  $\gamma(b) \in F$  и  $\gamma(t) \in D$  при  $a < t < b$ .

В дальнейшем мы будем использовать равенство

$$\text{cap } \mathcal{E} = \mathcal{M}(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \quad (7)$$

см. теорему 1 в [5].

Известно, что

$$\text{cap } \mathcal{E} \geq \frac{4\pi}{\ln \frac{m(A)}{m(C)}} \quad (8)$$

см., напр., неравенство (8.9) в [4].

Напомним следующие термины. Пусть  $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$  и пусть  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$  – измеримая по Лебегу функция. Положим

$$\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}, \quad (9)$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Будем говорить, что гомеоморфизм  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  является *кольцевым  $Q$ -гомеоморфизмом в точке  $z_0 \in D$* , если соотношение

$$\mathcal{M}(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \int_{\mathbb{A}} Q(z) \cdot \eta^2(|z - z_0|) dm(z) \quad (11)$$

выполнено для любого кольца  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ ,  $0 < r_1 < r_2 < d_0$  и для каждой измеримой функции  $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ , такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (12)$$

Говорят, что гомеоморфизм  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  является *кольцевым  $Q$ -гомеоморфизмом в области  $D$* , если условие (11) выполнено для всех точек  $z_0 \in D$ .

Следующее утверждение можно найти в работе [6], теорема 5.1.

**Теорема 1.** Пусть  $D$  и  $D'$  – области в  $\mathbb{C}$ , и  $f : D \rightarrow D'$  – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса  $W_{\text{loc}}^{1,1}$  и  $K_\mu \in L_{\text{loc}}^1(D)$ . Тогда  $f$  является кольцевым  $Q$ -гомеоморфизмом в каждой точке  $z_0 \in D$  с  $Q(z) = K_\mu(z)$ .

**3. Поведение на бесконечности.** Асимптотическое поведение на бесконечности кольцевых  $Q$ -гомеоморфизмов при оптимальных условиях исследовалось в работе [7]. Пусть  $r_0$  – произвольное фиксированное положительное число. Для гомеоморфизма  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  полагаем

$$M(R, f) = \max_{|z - z_0| = R} |f(z) - f(z_0)|. \quad (13)$$

**Лемма 2.** Пусть  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса  $W_{\text{loc}}^{1,1}$ . Если  $K_\mu \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{C})$ , тогда

$$\mathcal{M}(\Delta(fS_1, fS_2, f\mathbb{A})) \leq \Lambda(R), \quad (14)$$

где  $S_1 = S(z_0, r_0)$ ,  $S_2 = S(z_0, R)$ ,  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_0, R)$  и

$$\Lambda(R) = \left( \int_{r_0}^R \psi(t) dt \right)^{-2} \cdot \int_{\mathbb{A}} K_\mu(z) \psi^2(|z - z_0|) dm(z) \quad (15)$$

для любой измеримой (по Лебегу) функции  $\psi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  такой, что

$$0 < \int_{r_0}^R \psi(t) dt < \infty \quad \forall R > r_0. \quad (16)$$

*Доказательство.* Пусть  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_0, R)$  с  $0 < r_0 < R$ . Рассмотрим измеримую функцию

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{\frac{\psi(t)}{R}}{\int_{r_0}^R \psi(t) dt}, & t \in (r_0, R) \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_0, R). \end{cases} \quad (17)$$

Отметим, что функция  $\eta(t)$  удовлетворяет условию (12). Тогда из теоремы 1 вытекает оценка (14).

**Лемма 3.** Пусть  $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  – измеримая функция с  $|\mu(z)| < 1$  п.в. такая, что  $K_\mu \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{C})$ . Тогда уравнение (1) не имеет гомеоморфного решения  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  класса Соболева  $W_{\text{loc}}^{1,1}$  с асимптотикой

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M(z_0, f, R) e^{-\frac{2\pi}{\Lambda(R)}} = 0. \quad (18)$$

*Доказательство.* Предположим противное, а именно, что существует гомеоморфное решение  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  класса  $W_{\text{loc}}^{1,1}$ .

Рассмотрим кольцо  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_0, R)$  с  $0 < r_0 < R$ . Тогда  $(fB_R, f\overline{B}_{r_0})$  – кольцевой конденсатор в  $\mathbb{C}$  и, согласно (7), имеем равенство

$$\text{cap}(fB_R, f\overline{B}_{r_0}) = \mathcal{M}(\Delta(\partial fB_R, \partial f\overline{B}_{r_0}; f\mathbb{A}))$$

а ввиду гомеоморфности  $f$ , равенство

$$\Delta(\partial f B_R, \partial f B_{r_0}; f \mathbb{A}) = f(\Delta(\partial B_R, \partial B_{r_0}; \mathbb{A})).$$

В силу леммы 2 имеем

$$\text{cap}(f B_R, \overline{f B_{r_0}}) \leq \Lambda(R). \quad (19)$$

С другой стороны, в силу неравенства (8) вытекает оценка

$$\text{cap}(f B_R, \overline{f B_{r_0}}) \geq \frac{4\pi}{\ln \frac{m(f B_R)}{m(\overline{f B_{r_0}})}}. \quad (20)$$

Комбинируя (19) и (20), получаем, что

$$m(\overline{f B_{r_0}}) \leq m(f B_R) e^{-\frac{4\pi}{\Lambda(R)}}. \quad (21)$$

Заметим, что  $m(f B_R) \leq \pi M^2(z_0, f, R)$ , поэтому из неравенства (21) вытекает следующая оценка

$$\sqrt{\frac{m(\overline{f B_{r_0}})}{\pi}} \leq M(z_0, f, R) e^{-\frac{2\pi}{\Lambda(R)}}. \quad (22)$$

Очевидно,  $M_0 = \sqrt{\frac{m(\overline{f B_{r_0}})}{\pi}} > 0$  и не зависит от  $R$ . Переходя к нижнему пределу при  $R \rightarrow \infty$  и учитывая условие (18), получаем  $m(f B_{r_0}) = 0$ , что противоречит гомеоморфности отображения  $f$ .

**Лемма 4.** Пусть  $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  – измеримая функция с  $|\mu(z)| < 1$  п.в. и  $K_\mu \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ . Предположим, что существует неотрицательная измеримая (по Лебегу) функция такая, что

$$0 < I(R) = \int_{r_0}^R \psi(t) dt < \infty \quad \forall R > r_0, \quad (23)$$

и при  $R \rightarrow \infty$

$$\int_{\mathbb{A}(z_0, r_0, R)} K_\mu(z) \psi^2(|z - z_0|) dm(z) \leq c \cdot I^p(R), \quad (24)$$

где  $p \leq 2$ . Тогда уравнение (1) не имеет гомеоморфного решения  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  класса Соболева  $W^{1,1}_{\text{loc}}$  с асимптотикой

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M(z_0, f, R) \exp\left(-\frac{2\pi}{c} I^{2-p}(R)\right) = 0. \quad (25)$$

*Доказательство.* Ввиду условия (24) получаем

$$\Lambda(R) = \frac{\int_{\mathbb{A}(z_0, r_0, R)} K_\mu(z) \psi^2(|z - z_0|) dm(z)}{\left( \int_{r_0}^R \psi(t) dt \right)^2} \leqslant c I^{p-2}(R). \quad (26)$$

Отсюда следует, что

$$\exp \left[ -\frac{2\pi}{\Lambda(R)} \right] \leqslant \exp \left[ -\frac{2\pi}{c} I^{2-p}(R) \right]. \quad (27)$$

Таким образом, заключение леммы 4 вытекает из леммы 3.

В дальнейшем, для целых  $k \geqslant 0$  полагаем

$$e_0 = 1, \quad e_1 = e, \quad e_2 = e^e, \quad \dots, \quad e_{k+1} = \exp e_k \quad (28)$$

и

$$\ln_0 t = t, \quad \ln_1 t = \ln t, \quad \ln_2 t = \ln \ln t, \quad \dots, \quad \ln_{k+1} t = \ln \ln_k t. \quad (29)$$

**Лемма 5.** При  $R > e_N$  справедливо равенство

$$\int_{e_N}^R \frac{dt}{\prod_{k=0}^N \ln_k t} = \ln_{N+1} R. \quad (30)$$

*Доказательство.* Действительно, выполнив замену переменной  $s = \ln_N t$ , получим заявленное утверждение:

$$\int_{e_N}^R \frac{dt}{\prod_{k=0}^N \ln_k t} = \int_1^{\ln_N R} \frac{ds}{s} = \ln \ln_N R = \ln_{N+1} R. \quad (31)$$

Выбирая в лемме 4  $\psi(t) = \frac{1}{\prod_{k=0}^N \ln_k t}$ ,  $r_0 = e_N$  и  $p = 1$ , приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.** Пусть  $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  – измеримая функция с  $|\mu(z)| < 1$  п.в. такая, что  $K_\mu \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$  и

$$\int_{\mathbb{A}(z_0, e_N, R)} \frac{K_\mu(z) dm(z)}{\left( \prod_{k=0}^N \ln_k |z - z_0| \right)^2} \leq c \cdot \ln_{N+1}(R) \quad \forall R > e_N. \quad (32)$$

Тогда уравнение (1) не имеет гомеоморфного решения  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  класса Соболева  $W^{1,1}_{\text{loc}}$  с асимптотикой

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(z_0, f, R)}{\ln_N^\gamma(R)} = 0, \quad (33)$$

где  $\gamma = \frac{2\pi}{C}$ .

Выбирая в теореме 2  $N = 0$ , приходим к следующему следствию.

**Следствие 1.** Пусть  $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  – измеримая функция с  $|\mu(z)| < 1$  п.в. такая, что  $K_\mu \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$  и

$$\int_{\mathbb{A}(z_0, 1, R)} \frac{K_\mu(z) dm(x)}{|z - z_0|^2} \leq c \cdot \ln R \quad \forall R > 1, \quad (34)$$

Тогда уравнение (1) не имеет гомеоморфного решения  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  класса Соболева  $W^{1,1}_{\text{loc}}$  с асимптотикой

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(z_0, f, R)}{R^{\frac{2\pi}{c}}} = 0. \quad (35)$$

**Следствие 2.** Пусть  $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  – измеримая функция с  $|\mu(z)| < 1$  п.в. такая, что  $K_\mu \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$  и

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{S(z_0, R)} K_\mu(z) |dz| \leq K \quad \forall R > 1. \quad (36)$$

Тогда уравнение (1) не имеет гомеоморфного решения  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  класса Соболева  $W^{1,1}_{\text{loc}}$  с асимптотикой

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(z_0, f, R)}{R^{1/K}} = 0. \quad (37)$$

## Список литературы

- [1] *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach. Springer Advances in Mathematics. ISBN 978-1-4614-3190-9, Due: May 31, 2012.
- [2] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. Springer Monographs in Mathematics. – New York: Springer, 2009. – 367 pp.
- [3] *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – Vol. 448. – P. 1–40.
- [4] V. Maz'ya, *Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces.* Contemp. Math., **338** (2003), 307–340.
- [5] *Шлык В.А.* О равенстве  $p$ -емкости и  $p$ -модуля // Сиб. мат. ж. – 1993. – Т. 34, № 6. – С. 216–221.
- [6] *Д. А. Ковтонюк, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов* К теории отображений классов Соболева и Орлича-Соболева - Киев : Наук. думка, 2013. - 303 с.
- [7] *Р.Р. Салимов., Е.С. Смолова* О порядке роста кольцевых  $Q$ -гомеоморфизмов на бесконечности // Укр. мат. журн. – 2010. – Т.62, № 6. – С. 829–836.

Елена Сергеевна Афанасьева

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск

Салимов Руслан Радикович

Институт математики НАН Украины, Киев

Email: salimov07@rambler.ru, ruslan623@yandex.ru,